セルオートマトンの合成とリミットサイクルについて (アルゴリズムと計算理論の新展開)

石田, 俊一; 井口, 修一

数理解析研究所講究録
第 1799 巻 2012 年 37-43

セルオートマトンの合成とリミットサイクルについて

九州産業大学基礎教育センター 石田 俊一 (Toshikazu Ishida)
Center for Fundamental Education, Kyushu Sangyo University
九州大学大学院数理学研究院 井口 修一 (Shuichi Inokuchi)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

セルオートマトン (CA) とは、内部状態を持つ複数個のセルで構成される離散的な様相 $c \in C$ が、遷移関数 $F : C \to C$ に従って離散時間毎に変化する遷移系 (C, F) である。セルオートマトンは、非常に単純な構造をした計算モデルであるが、多様性に富み、かつ、複雑な挙動を示すことから、交通流などの社会、経済現象、様々な自然現象のシミュレーションなど、多くの分野で研究、応用されている。その中の 1 つに、1 次元 2 状態のセルオートマトンの遷移規則をうまく定義することで、最大周期（2 のシステムサイズ乗ー定数）のパターンを生成するセルオートマトンが構成できることから、ランダムパターン生成器への応用例がある。一様構造ではない, つまりセル毎に適用する規則が変わるハイブリッドセルオートマトンでは、研究が報告されており、最大周期をもつための必要十分条件（遷移行列の特性多項式が原子多項式）[1] や、原子多項式から最大周期をもつセルオートマトンを構成する方法が提案されている [4]。一方、一様な構造を持つセルオートマトンでは、最大周期をもつセルオートマトンはいくつかしか知られていない [3]。しかし、ハイブリッドなセルオートマトンほどではないが、一様な構造のセルオートマトンの種類も非常に多く、その中に最大周期をもつセルオートマトンが存在すると思われるが、そのすべてを考察するのはほぼ不可能である。

本論文では、セルオートマトンの合成により新たなセルオートマトンを構成し、挙動の関係性を考察する。中でもセルオートマトンの合成が可換である組み合わせについて注目する。つまり、2 つのセルオートマトン $CA_1 = (C, F_1 : C \to C), CA_2 = (C, F_2 : C \to C)$ に対して、遷移関数を $F = F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ と定義したセルオートマトン $CA = (C, F)$ を構成し、CA_1、CA_2 と CA の挙動の関連について考察する。

2 セルオートマトンとその合成

セルオートマトンの定義は様々あるが、ここでは、論文 [2] の定義を用いる。

定義 1 G を群とする。有限集合 $V \subset G, V' \subset 2^V$ に対し、$CA = (G, V, V')$ を G 上のセルオートマトンとし、V' に関して、関数 $f : 2^V \to \{\phi, \{e\}\}$ を以下で定義する。$\forall A \in 2^V$ のとき

$$f(A) = \begin{cases} \phi & (A \notin V') \\ \{e\} & (A \in V') \end{cases}$$

また、$\forall X \in 2^G$ に対し,$F : 2^G \to 2^G$ を $F(X) = \bigcup_{g \in G} gf(g^{-1}X \cap V)$ と定義する。このとき、f を局所遷移関数、F を大域遷移関数と呼ぶ。

次にセルオートマトンの合成を定義する。

定義 2 $CA_1 = (G, V_1, V_1')$、$CA_2 = (G, V_2, V_2')$ を G 上のセルオートマトンとする。このとき、合成セルオートマトン $CA_1 \Diamond CA_2 = (G, V_1 \cdot V_2, V_1' \Diamond V_2')$ を以下の様に定義する。

- $V_1 \cdot V_2 = \{v_1 v_2 \in G | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$
- $V_1' \Diamond V_2' = \{X \in 2^{V_1 \cdot V_2} | \{v \in V_1 | v^{-1} X \cap V_2 \in V_2'\} \in V_1'\}$

合成に対し、以下の性質がある。

定理 3 [2] 大域遷移関数 $F_{CA_1}, F_{CA_2}, F_{CA_1 \Diamond CA_2}$ に対し、

$$F_{CA_1} \circ F_{CA_2} = F_{CA_1 \Diamond CA_2}$$

が成り立つ。

定義 4 C を様相の集合、F を遷移関数とする。このとき $F^\infty(C)$ を以下で定義する。

$$F^\infty(C) := \{c \in C | \exists n > 0 \ \ c = F^n(c)\}$$

$c \in F^\infty(C)$ を F のリミットサイクル *(LC)* 上の様相と呼ぶこととする。

3 合成CAのLCの周期

セルオートマトンの合成が可換となる条件はいくつか明らかになっている [6]。本論文では合成が可換となるセルオートマトンに着目し、そのリミットサイクルについて考察する。以後、特に断わらない限り、セルオートマトンの合成は可換であるものとする。今、セルオートマトン $CA = (G, V, V')$ は2つのセルオートマトン $CA_1 = (G, V_1, V_1')$、$CA_2 = (G, V_2, V_2')$ の合成で定義されているとする。すなわち、$CA = CA_1 \diamond CA_2 = CA_2 \diamond CA_1$ であり、大域遷移関数も $F = F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ を満たす。

補題 5 以下が成り立つ。

- $F(C) \subseteq F_1(C)$
- $F(C) \subseteq F_2(C)$

$c \in C - F(C)$ がエデンの園 (GOE) 様相であるので、上記の補題より $C - F_1(C) \cup C - F(C) \subseteq C - F(C)$ となり、$c \in C$ が F_1 または F_2 の GOE 様相ならば、c は F の GOE 様相であることを意味する。

LC 上の様相の集合について以下の性質がある。

補題 6 以下が成り立つ。

1. $F_1^\infty(C) \cap F_2^\infty(C) \subset F^\infty(C)$
2. $F^\infty(C) \subset F_1^\infty(C) \cup F_2^\infty(C)$

証明

(1) $c \in F_1^\infty(C) \cap F_2^\infty(C)$ とする。すなわち、$c = F_1^{n_1}(c) = F_2^{n_2}(c)$ なる $n_1, n_2 > 0$ が存在する。いま、$F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ であるので、$F^{n_1 \times n_2}(c) = (F_1 \circ F_2)^{n_1 \times n_2}(c) = F_1^{n_1 \times n_2}(F_2^{n_1 \times n_2}(c)) = c$ となり、$c \in F_\infty(C)$ である。

(2) $c \in F^\infty(C)$ とする。すなわち、$c = F^n(c)$ なる $n > 0$ が存在する。いま、C は有限集合であるので、$n \times m > \sharp C$ なる整数 m をとることができる。$c = F^{n \times m}(c) = F_1^{n \times m}(F_2^{n \times m}(c)) (= F_2^{n \times m}(F_1^{n \times m}(c)))$ であるので、$c \in F_1^\infty(C) (c \in F_2^\infty(C))$ である。($t > \sharp C$、$\forall c \in C$ に対して、$F^t(c) \in F^\infty(C)$ である。)

□

この補題は $c \in C$ が F_1 の LC 上の様相であり、かつ F_2 の LC 上の様相であるならば c は F の LC 上の様相であることを意味する。また、合成の可換性より次の補題が言える。

補題 7 以下が成り立つ。

1. $c \in F_1^\infty(C)$ ならば $F_2(c) \in F_1^\infty(C)$
2. $c \in F^\infty(C)$ ならば $F_1(c) \in F^\infty(C)$

系 8 以下が成り立つ。

$$(C - F_1^\infty(C)) \cap (C - F_2^\infty(C)) \subseteq (C - F^\infty(C))$$

上記の系より様相 c が F_1, F_2 上の LC 上になければ、F の LC を構成する様相にはなりえないことを表す。

次に各遷移関数に対する周期と、合成した遷移関数の周期に関して考察する。

補題 9 ある $c \in C$ に対して、$c = F_1^{n_1}(c) = F_2^{n_2}(c)$ なる整数 $n_1, n_2 > 0$ が存在するならば $c = F^{LCM(n_1,n_2)}(c)$ である。

以下の議論において、$c \in F_1^\infty(C) \cap F_2^\infty(C)$ とし、$C_1 = \{F_1^t(c) | t \geq 0\}$、$C_2 = \{F_2^t(c) | t \geq 0\}$、とする。また、$\sharp C_1 = n_1$、$\sharp C_2 = n_2$、$\sharp(C_1 \cap C_2) = m$ とする。

補題 10 $m | n_1$ かつ $m | n_2$ である。

証明 同じ方法で証明できることから $m | n_1$ のみ証明する。$m \not| n_1$ と仮定する。このとき、$t = min\{t' > 0 | F_1^{t'}(c) \in C_2\}$ とする。$c \in C_2, F_1^t(c) \in C_2$ を満たす。また、$1 < t' < t$ に対して $F_1^{t'}(c) \notin C_2$ である。このとき、$F_1^s(c) \in C_2$ であり、$F_1^{s+s'}(c) \in C_2 \wedge F_1^{s+t'}(c) \notin C_2 \ \ (1 \geq t' < s') \wedge t \neq s'$ を満たす $s > 0, s' > 0$ が存在する。ここである k に対し、$c = (F_2^k F_1^s)(c)$ とする。このとき

1. $t > s'$ ならば、

$$\begin{aligned} C_2 &\not\ni F_1^{s'}(c) \\ &= F_1^{s'}(F_2^k F_1^s)(c) \\ &= F_2^k(F_1^{s+s'}(c)) \end{aligned}$$

   ここで $F_1^{s+s'}(c) \in C_2$ より、矛盾する。

2. $t < s'$ のときも同様に矛盾が導ける。

ゆえに $m | n_1$ である。 □

系 11 $F_1^{\frac{n_1}{m}}(C_2) = C_2$ であり $F_2^{\frac{n_2}{m}}(C_1) = C_1$ である。また、$0 < t < \frac{n_1}{m}$ に対し、$F_1^t(C_2) \neq C_2$ であり、$0 < t < \frac{n_2}{m}$ に対し、$F_1^t(C_1) \neq C_1$ である。

定理 12 $C_1 \cap C_2 = \{c\}$ ならば

$$\min\{t | t > 0, c = F^t(c)\} = LCM(n_1, n_2)$$

である。

証明 $c = F^{LCM(n_1,n_2)}(c)$ は明らかである。$C_1 \cap C_2 = \{c\}$ より $n_1 \not| t$ なる $t > 0$ に対して、$C_1 \neq F_2^t(C_1)$ であるので、$c \neq F^t(c) \ \ (1 \leq t < LCM(n_1, n_2))$ となる。よって $\min\{t > 0 | c = F^t(c)\} = LCM(n_1, n_2)$ である。 □

定理 13 $\sharp(C_1 \cap C_2) = m > 1$ とし、$t = min\{t' > 0 | F_1^{\frac{n_1}{m}}(c) = F_2^{\frac{n_2}{m}t'}(c)\}$ とする。このとき

$$min\{i|F^i(c) = c\} = LCM(\frac{n_1 + n_2 t}{m}, n_2) \times \frac{n_1}{(n_1 + n_2 t)}$$

である。

証明 $F^{\frac{n_1}{m}}(c) = F_2^{\frac{n_1}{m}}(F_1^{\frac{n_1}{m}}(c)) = F_2^{\frac{n_1+n_2 t}{m}}(c)$ より

$$\begin{aligned}
&= F^{LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2) \times \frac{n_1}{(n_1+n_2 t)}}(c) \\
&= F^{LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2) \times \frac{m}{n_1+n_2 t} \times \frac{n_1}{m}}(c) \\
&= F_2^{LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2)}(c) \\
&= c
\end{aligned}$$

となる。また、$F^k(c) = c$、かつ $0 < k < LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2) \times \frac{n_1}{(n_1+n_2 t)}$ となる k が存在したと仮定する。系 11 より k は $\frac{n_1}{m}$ の倍数でなければならないので、$k = \frac{n_1}{m}h$ と置くと、

$$c = F^{\frac{n_1}{m}h} = F_2^{\frac{n_1+n_2 t}{m}h}(c)$$

となり、$\frac{n_1+n_2 t}{m}h$ は n_2 の倍数でなければならない。ゆえに、$LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2) < \frac{n_1+n_2 t}{m}h$、すなわち、$LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2) \times \frac{n_1}{(n_1+n_2 t)} < \frac{n_1}{m}h = k$ となり仮定に矛盾する。よって、$min\{i|F^i(c) = c\} = LCM(\frac{n_1+n_2 t}{m}, n_2) \times \frac{n_1}{(n_1+n_2 t)}$ である。

□

系 14 $\sharp C_1 = \sharp C_2 = n, \sharp(C_1 \cap C_2) = m > 1$ であるとする。このとき、$t = min\{t' > 0 | F_1^{\frac{n}{m}}(c) = F_2^{\frac{n}{m}t'}(c)\}$ とすると、

$$min\{i > 0 | F^i(c) = c\} = \frac{n}{m} \times \frac{LCM(m, t+1)}{t+1}$$

である。

4 合成 CA の挙動例

この章では周期境界を持つ 1 次元 2 状態 3 近傍セルオートマトンの合成によって出来るセルオートマトンの具体的な例を紹介する。なお CA の遷移関数は Wolfram の番号付けを利用する [5]。また、各様相を 2 進数で表された数値とし、10 進数に変換することで番号付けを行う。

セルサイズが 5 のセルオートマトンに対して、合成セルオートマトンの周期長が合成前の各セルオートマトンの周期長の最小公倍数になる例を挙げる。図 1、2、3 は CA90(5)、CA240(5)、それらの合成セルオートマトンの遷移図である。$c = 9$ に対し,$C_1 = \{6, 9, 15\}, C_2 = \{5, 9, 10, 18, 20\}$ であり,$\min\{t > 0 | F^t(9) = 9\} = 15$ である。また、合成セルオートマトンの周期長が最小公倍数になる例で、非線形セルオートマトンと線形セルオートマトンの合成セルオートマトンの例を挙げる。CA15(5)、CA150(5)、それらの合成セルオートマトンが図 4、5、6 である。ここで $c = 6$ に対し、$C_1 = \{3, 6, 7, 12, 14, 17, 19, 24, 25, 28\}, C_2 = \{6, 9, 15\}$ であり、$\min\{t > 0 | F^t(6) = 6\} = 30$ である。

5 終わりに

本稿ではセルオートマトンの合成において、合成が可換となるセルオートマトンと合成セルオートマトンの挙動について考察し、合成セルオートマトンの周期と合成前のセルオートマトンの挙動の関係性を示

した。また、合成セルオートマトンの例をいくつか挙げ、サイズは小さいが、合成により最大周期をもつセルオートマトンが構成できることを示した。

今後は、合成に関して可換となる為の遷移関数の組の条件のさらなる考察、基本となるセルオートマトンの挙動解析を進めることで、最大周期をもつ合成セルオートマトンの系統的な構成を目指す。

参考文献

[1] B. Elspas, The Theory of Autonomous Linear Sequential Networks Circuit Theory, IRE Transactions on Issue Date,Volume: 6 Issue:1 ,p45 - 60(1959)

[2] T. Ito, M. Fujio, S. Inokuchi, Y. Mizoguchi, Composition, union and division of cellular automata on groups, Proc. of the 16th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems, Automata2010, p255-264 (2010)

[3] M. Matsumoto, Simple Cellular Automata as Pseudorandom m-Sepuence Generators for Bulit-In Self-Tes, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, vol.8,No.1, p31-42 (1988)

[4] 手塚 集, 伏見 正則VLSI のテストパターンの生成, 数理解析研究所講究録, volume 820, p72-75 (1993)

[5] S. Wolfram, Statistical Mechanics of Cellular Automata itshape Reviews of Modern Physics. volume 55, p601-644 (1983)

[6] 石田 俊一, 井口 修一群上のセルオートマトンにおける遷移関数の合成とその可換性について, 応用数学合同研究集会報告集、p112-117(2011)

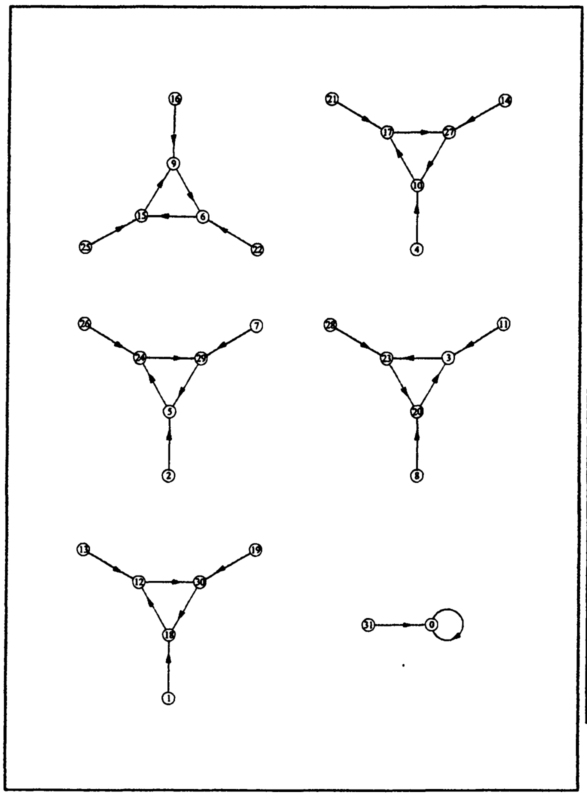

図 1: CA90(5)

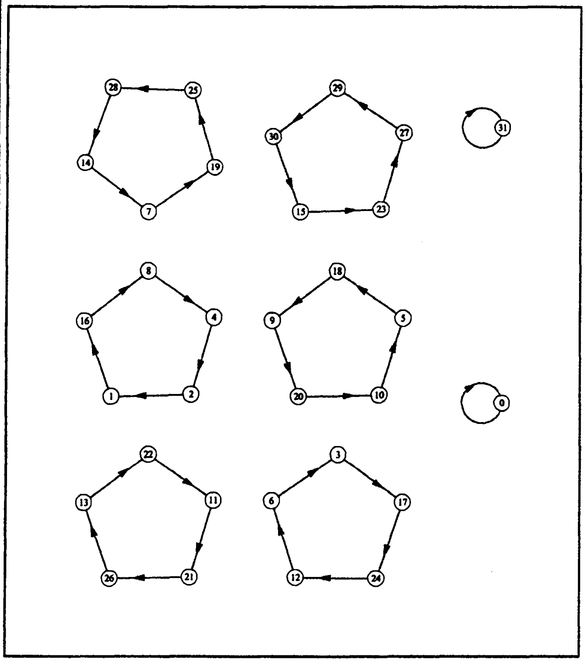

図 2: CA240(5)

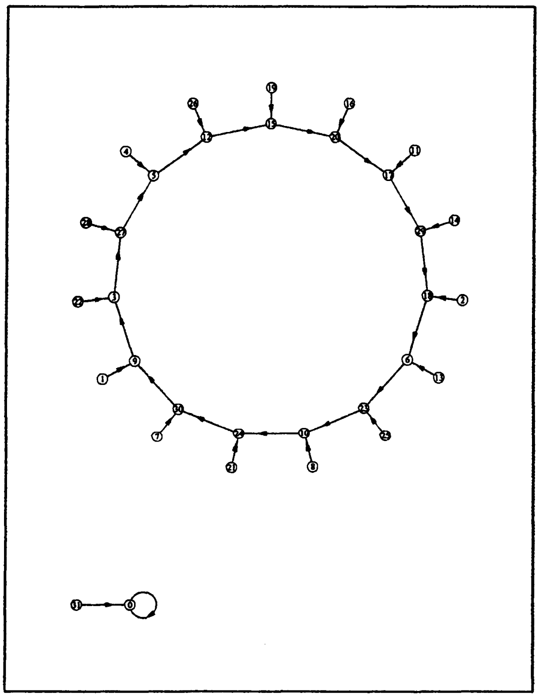

図 3: CA90(5) × CA240(5)

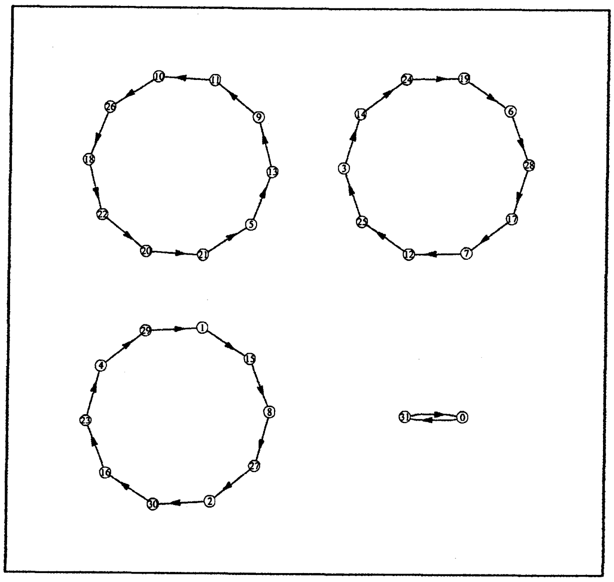

図 4: CA15(5)

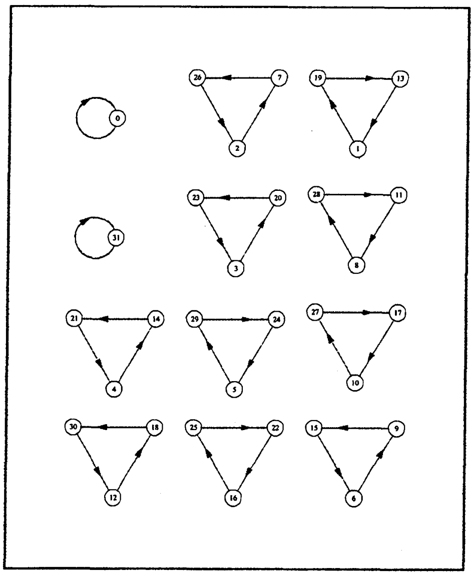

図 5: CA150(5)

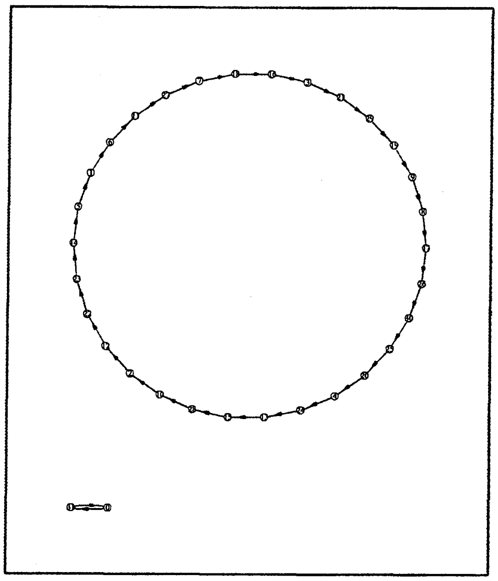

図 6: CA15(5) × CA150(5)